

# REPREZENTACJE INDUKOWANE I TEORIA MACKEYA

PIOTR MIKOŁAJ SOLTAN

STRESZCZENIE. Niniejsze notatki stanowią uzupełnienie wykładów „Teoria grup I” na Wydziale Fizyki UW o elementy teorii reprezentacji indukowanych i teorii Mackeya wraz z klasyfikacją nieprzywiedlnych reprezentacji skończonych grup postaci  $G = A \rtimes H$ , gdzie  $A$  jest grupą przemenną.

## SPIS TREŚCI

|                                                            |    |
|------------------------------------------------------------|----|
| 1. Wstęp                                                   | 1  |
| 2. Definicja reprezentacji indukowanej                     | 1  |
| 3. Podstawowe własności funktora indukcji                  | 5  |
| 4. Unitarność i charakter reprezentacji indukowanej        | 8  |
| 5. Obcięcie do podgrup i kryterium nieprzywiedlności       | 10 |
| 6. Teoria Mackeya                                          | 11 |
| 6.1. Reprezentacje iloczynów półprostych grupy przemiennej | 12 |
| 7. Przykład: reprezentacje grupy dihedralnej               | 15 |
| Literatura                                                 | 17 |

## 1. WSTĘP

Wszystkie grupy, którymi będziemy się zajmować w będą skończone, a rozważane reprezentacje będą skończenie wymiarowe nad ciałem liczb zespolonych  $\mathbb{C}$ . Zakładamy znajomość podstawowych pojęć i faktów z teorii reprezentacji grup skończonych. Materiał oraz użyta terminologia i oznaczenia oparte są na książce [1].

## 2. DEFINICJA REPREZENTACJI INDUKOWANEJ

Niech  $G$  będzie grupą,  $K$  jej podgrupą, a  $\rho$  reprezentacją  $K$  na przestrzeni wektorowej  $V$  (będziemy pisać  $\rho \in \text{Rep}(K, V)$ ). Zdefiniujemy

$$Z = \{f : G \rightarrow V \mid \forall g \in G, k \in K \ f(gk) = \rho(k)^{-1}f(g)\}.$$

Łatwo sprawdzamy, że  $Z$  jest przestrzenią wektorową względem naturalnych operacji na funkcjach  $G \rightarrow V$ . Dalej, dla dowolnej  $f \in Z$  oraz  $g \in G$  funkcja

$$G \ni h \mapsto f(g^{-1}h) \in V$$

także należy do  $Z$ , a więc odwzorowanie  $\sigma(g) : f \mapsto f(g^{-1}\cdot)$  jest operatorem liniowym na  $Z$ . Jest jasne, że

$$\sigma : G \ni g \mapsto \sigma(g) \in \text{GL}(Z)$$

jest reprezentacją  $G$  na  $Z$ . Reprezentację tę nazywamy *reprezentacją indukowaną* z reprezentacji  $\rho$  podgrupy  $K$ . Oznaczamy

$$\sigma = \text{Ind}_K^G \rho, \quad Z = \text{Ind}_K^G V.$$

Oznaczeń  $Z$  i  $\sigma$  będziemy często używać.

**Uwaga 2.1.**

- (1) Niech  $\rho \in \text{Rep}(K, V)$  i  $\rho' \in \text{Rep}(K, V')$  będą równoważne: istnieje izomorfizm  $U : V \rightarrow V'$  taki, że

$$\rho'(k) = U\rho(k)U^{-1}, \quad k \in K.$$

Niech  $Z = \text{Ind}_K^G V$ ,  $\sigma = \text{Ind}_K^G \rho$  i  $Z' = \text{Ind}_K^G V'$ ,  $\sigma' = \text{Ind}_K^G \rho'$ , tj.

$$\begin{aligned} Z &= \{f : G \rightarrow V \mid \forall g \in G, k \in K \ f(gk) = \rho(k)^{-1}f(g)\}, \\ Z' &= \{f' : G \rightarrow V' \mid \forall g \in G, k \in K \ f'(gk) = \rho'(k)^{-1}f'(g)\} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} (\sigma(g)f)(h) &= f(g^{-1}h), & f \in Z, \ g, h \in G, \\ (\sigma'(g)f')(h) &= f'(g^{-1}h), & f' \in Z', \ g, h \in G. \end{aligned}$$

Dla  $f \in Z$  definiujemy  $\Gamma f : G \rightarrow V'$  kładąc  $(\Gamma f)(g) = Uf(g)$ . Mamy dla  $g \in G$  i  $k \in K$

$$(\Gamma f)(gk) = Uf(gk) = U\rho(k)^{-1}f(g) = \rho'(g)^{-1}Uf(g) = \rho'(g)^{-1}(\Gamma f)(g),$$

czyli  $\Gamma f \in Z'$ . Łatwo sprawdzić, że  $\Gamma$  jest izomorfizmem  $Z$  na  $Z'$  i dla  $g, h \in G$  zachodzi

$$(\sigma'(g)\Gamma f)(h) = (\Gamma f)(g^{-1}h) = Uf(g^{-1}h) = U(\sigma(g)f)(h) = (\Gamma\sigma(g)f)(h).$$

Zatem dla każdego  $g \in G$  mamy  $\sigma'(g)\Gamma = \Gamma\sigma(g)$ , czyli  $\sigma$  i  $\sigma'$  są równoważne.

- (2) Niech  $K$  i  $\tilde{K}$  będą podgrupami  $G$  i niech  $\rho \in \text{Rep}(K, V)$  i  $\tilde{\rho} \in \text{Rep}(\tilde{K}, V)$ . Niech  $\phi \in \text{Aut}(G)$  będzie taki, że  $\tilde{K} = \phi(K)$  i  $\tilde{\rho} = \rho \circ \phi^{-1}$ . Oznaczmy  $Z = \text{Ind}_K^G V$ ,  $\sigma = \text{Ind}_K^G \rho$  i  $\tilde{Z} = \text{Ind}_{\tilde{K}}^G V$ ,  $\tilde{\sigma} = \text{Ind}_{\tilde{K}}^G \tilde{\rho}$ , tj.

$$\begin{aligned} Z &= \{f : G \rightarrow V \mid \forall g \in G, k \in K \ f(gk) = \rho(k)^{-1}f(g)\}, \\ \tilde{Z} &= \{\tilde{f} : G \rightarrow V \mid \forall g \in G, \tilde{k} \in \tilde{K} \ \tilde{f}(g\tilde{k}) = \tilde{\rho}(\tilde{k})^{-1}\tilde{f}(g)\} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} (\sigma(g)f)(h) &= f(g^{-1}h), & f \in Z, \ g, h \in G, \\ (\tilde{\sigma}(g)\tilde{f})(h) &= \tilde{f}(g^{-1}h), & \tilde{f} \in \tilde{Z}, \ g, h \in G. \end{aligned}$$

Dla  $f \in Z$  zdefiniujemy  $\Theta f : G \rightarrow V$  kładąc

$$(\Theta f)(g) = f(\phi^{-1}(g)), \quad g \in G.$$

Mamy dla każdego  $g \in G$  i  $\tilde{k} \in \tilde{K}$

$$\begin{aligned} (\Theta f)(g\tilde{k}) &= f(\phi^{-1}(g\tilde{k})) = f(\phi^{-1}(g)\phi^{-1}(\tilde{k})) \\ &= \rho(\phi^{-1}(\tilde{k}))^{-1}f(\phi^{-1}(g)) = \rho(\phi^{-1}(\tilde{k}))^{-1}(\Theta f)(g), \end{aligned}$$

czyli  $\Theta f \in \tilde{Z}$ . Oczywiście  $\Theta$  jest izomorfizmem  $Z \rightarrow \tilde{Z}$ . Ponadto dla  $g, h \in G$

$$\begin{aligned} (\tilde{\sigma}(g)\Theta f)(h) &= (\Theta f)(g^{-1}h) = f(\phi^{-1}(g^{-1}h)) \\ &= f(\phi^{-1}(g^{-1})\phi^{-1}(h)) = (\sigma(\phi^{-1}(g))f)(\phi^{-1}(h)) = (\Theta\sigma(\phi^{-1}(g))f)(h), \end{aligned}$$

co pokazuje, że  $\tilde{\sigma} \approx \sigma \circ \phi^{-1}$ . W szczególności, jeśli  $\phi \in \text{Inn}(G)$ , to  $\tilde{\sigma} \approx \sigma$ .

- (3) Niech  $K_1$  i  $K_2$  będą podgrupami  $G$ ,  $\phi \in \text{Inn}(G)$  będzie taki, że  $K_2 = \phi(K_1)$  i dla  $i = 1, 2$  niech  $\rho_i \in \text{Rep}(K_i, V_i)$  będą takie, że  $\rho_2 \approx \rho_1 \circ \phi^{-1}$ . Wtedy

$$\text{Ind}_{K_1}^G \rho_1 \approx \text{Ind}_{K_2}^G \rho_1 \circ \phi^{-1}$$

na mocy punktu (2), a

$$\text{Ind}_{K_2}^G \rho_1 \circ \phi^{-1} \approx \text{Ind}_{K_2}^G \rho_2$$

na mocy punktu (1). Stąd  $\text{Ind}_{K_1}^G \rho_1 \approx \text{Ind}_{K_2}^G \rho_2$ .

Dla  $v \in V$  zdefiniujemy  $f_v : G \rightarrow V$  kładąc

$$f_v(g) = \begin{cases} \rho(g)^{-1}v & g \in K, \\ 0 & g \notin K. \end{cases}$$

Łatwo się przekonać, że  $f_v \in Z$ : niech  $g \in G$  i  $k \in K$ . Wtedy

$$\begin{aligned} f_v(gk) &= \begin{cases} \rho(gk)^{-1}v & gk \in K, \\ 0 & gk \notin K \end{cases} \\ &= \begin{cases} \rho(k)^{-1}\rho(g)^{-1}v & g \in K, \\ 0 & g \notin K \end{cases} \\ &= \rho(k)^{-1}f_v(g). \end{aligned}$$

Co więcej  $T : V \ni v \mapsto f_v \in Z$  jest iniektywnym odwzorowaniem liniowym i dla każdego  $k \in K$  mamy

$$\begin{aligned} (\sigma(k)Tv)(g) &= (\sigma(k)f_v)(g) = f_v(k^{-1}g) \\ &= \begin{cases} \rho(k^{-1}g)^{-1}v & g^{-1}k \in K, \\ 0 & g^{-1}k \notin K \end{cases} \\ &= \begin{cases} \rho(g)^{-1}\rho(k)v & g \in K, \\ 0 & g \notin K \end{cases} \\ &= f_{\rho(k)v}(g) = (T\rho(k)v)(g). \end{aligned}$$

Innymi słowy  $T\rho(k) = \sigma(k)T$  dla wszystkich  $k \in K$ .

Niech  $V_0 = \text{im } T$ . Z powyższych rozważań wynika, że  $V_0 \subset Z$  jest podprzestrzenią niezmienniczą dla operatorów  $\{\sigma(k) \mid k \in K\}$  (innymi słowy  $V_0$  jest  $K$ -niezmiennicza). Dalej niech  $\mathcal{S}$  będzie układem reprezentantów warstw  $K$  w  $G$ :

$$G = \bigsqcup_{s \in \mathcal{S}} sK.$$

**Stwierdzenie 2.2.** *Mamy  $Z = \bigoplus_{s \in \mathcal{S}} \sigma(s)V_0$ .*

*Dowód.* Niech  $f \in Z$ . Dla  $s \in \mathcal{S}$  zdefiniujemy  $v_s = f(s)$ . Weźmy  $g \in G$  i obliczmy

$$\left( \sum_{s \in \mathcal{S}} \sigma(s)f_{v_s} \right)(g).$$

Ponieważ  $g$  można zapisać jednoznacznie w postaci  $g = s'k$  dla  $s' \in \mathcal{S}$  i  $k \in K$ , więc dla dowolnego  $s \in \mathcal{S}$  mamy

$$\begin{aligned} (\sigma(s)f_{v_s})(g) &= f_{v_s}(s^{-1}g) = f_{v_s}(s^{-1}s'k) = \begin{cases} \rho(s^{-1}s'k)^{-1}v_s & s^{-1}s'k \in K, \\ 0 & s^{-1}s'k \notin K \end{cases} \\ &= \begin{cases} \rho(s^{-1}s'k)^{-1}v_s & s^{-1}s' \in K, \\ 0 & s^{-1}s' \notin K \end{cases} \\ &= \delta_{s,s'}f_{v_s}(k) = \delta_{s,s'}f_{v_{s'}}(k) \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \left( \sum_{s \in \mathcal{S}} \sigma(s)f_{v_s} \right)(g) &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \sigma(s)f_{v_s}(g) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \delta_{s,s'}f_{v_{s'}}(k) = f_{v_{s'}}(k) \\ &= \rho(k)^{-1}v_{s'} && \text{z definicji } f_{v_{s'}} \\ &= \rho(k)^{-1}f(s') && \text{z definicji } v_{s'} \\ &= f(s'k) && \text{z definicji } Z \\ &= f(g). \end{aligned}$$

Skoro tak jest dla wszystkich  $g$  otrzymujemy  $f = \sum_{s \in \mathcal{S}} \sigma(s)f_{v_s} \in \sum_{s \in \mathcal{S}} \sigma(s)V_0$ .

Ponadto dla różnych  $s, s' \in \mathcal{S}$  mamy  $\sigma(s)V_0 \cap \sigma(s')V_0 = \{0\}$ , gdyż wtedy dla dowolnych  $v, v' \in V$  i każdego  $g$

$$\begin{aligned} (\sigma(s)f_v)(g) &= \begin{cases} \rho(s^{-1}g)^{-1}v & g \in sK, \\ 0 & g \notin sK, \end{cases} \\ (\sigma(s')f_{v'})(g) &= \begin{cases} \rho(s'^{-1}g)^{-1}v' & g \in s'K, \\ 0 & g \notin s'K, \end{cases} \end{aligned}$$

czyli funkcje należące do  $\sigma(s)V_0 \cap \sigma(s')V_0$  mają nośnik zawarty w  $sK \cap s'K = \emptyset$ .  $\square$

**Wniosek 2.3.** Mamy  $\dim \text{Ind}_K^G \rho = [G : K] \dim \rho$ .

*Dowód.*  $\dim \text{Ind}_K^G \rho = \dim \text{Ind}_K^G V = \sum_{s \in \mathcal{S}} \dim \sigma(s)V_0 = |\mathcal{S}| \dim V = [G : K] \dim \rho = [G : K] \dim \rho$ .  $\square$

**Uwaga 2.4.** Zauważmy, że podprzestrzeń  $V_0$  składa się dokładnie z tych funkcji należących do  $Z = \text{Ind}_K^G V$ , których nośnik zawarty jest w podgrupie  $K$ . Istotnie: dla każdego  $v \in V$  nośnik funkcji  $f_v$  zawarty jest w  $K$ , a elementy podprzestrzeni występujących w rozkładzie

$$Z = \bigoplus_{s \in \mathcal{S}} \sigma(s)V_0$$

mają nośniki w warstwach  $sK$  ( $s \in \mathcal{S}$ ).

**Stwierdzenie 2.5.** Niech  $K$  będzie podgrupą  $G$  i niech  $\mathcal{S}$  będzie układem reprezentantów warstw  $K$  w  $G$ . Niech  $\tau \in \text{Rep}(G, W)$  i niech  $V \subset W$  będzie  $K$ -niezmienniczą podprzestrzenią taką, że  $W = \bigoplus_{s \in \mathcal{S}} \tau(s)V$ . Wtedy  $\tau \approx \text{Ind}_K^G \rho$ , gdzie  $\rho \in \text{Rep}(K, V)$  jest zdefiniowana przez

$$\rho(k) = \tau(k)|_V, \quad k \in K.$$

*Dowód.* Niech  $Z = \text{Ind}_K^G V$  i  $\sigma = \text{Ind}_K^G \rho$  oraz niech  $V_0 = \{f_v \mid v \in V\} \subset Z$ . Oczywiście  $V_0 \cong V$ . Mamy

$$W = \bigoplus_{s \in \mathcal{S}} \tau(s)V \quad i \quad Z = \bigoplus_{s \in \mathcal{S}} \sigma(s)V_0.$$

Wykorzystując rozkład dowolnego  $w \in W$  na składniki w podprzestrzeniach  $(\tau(s)V)_{s \in \mathcal{S}}$  definiujemy  $\Phi : W \rightarrow Z$  kładąc

$$\Phi(w) = \Phi\left(\sum_{s \in \mathcal{S}} \tau(s)v_s\right) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \sigma(s)f_{v_s}.$$

Jest jasne, że  $\Phi$  jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych. Weźmy teraz  $s \in \mathcal{S}$ ,  $g \in G$  i  $v \in V$ . Rozkładając element  $gs$  na  $gs = s'k$  dla jedynych  $s' \in \mathcal{S}$  i  $k \in K$  otrzymujemy

$$\tau(g)(\tau(s)v) = \tau(gs)v = \tau(s'k)v = \tau(s')\tau(k)v = \tau(s')\rho(k)v$$

oraz

$$\sigma(g)(\sigma(s)f_v) = \sigma(gs)f_v = \sigma(s')\sigma(k)f_v = \sigma(s')f_{\rho(k)v},$$

a skoro  $\sigma(s)f_v = \Phi(\tau(s)v)$  i  $\sigma(s')f_{\rho(k)v} = \Phi(\tau(s')\rho(k)v)$ , otrzymujemy

$$\sigma(g)\Phi = \Phi\tau(g), \quad g \in G,$$

czyli  $\tau$  jest równoważna  $\sigma = \text{Ind}_K^G \rho$ .  $\square$

**Przykład 2.6.** Niech  $\rho$  będzie trywialną (jednowymiarową) reprezentacją podgrupy  $K$  grupy  $G$ . Mamy

$$\text{Ind}_K^G \mathbb{C} = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall g \in G, k \in K \ f(gk) = f(g)\},$$

a więc  $\text{Ind}_K^G \mathbb{C}$  można w naturalny sposób utożsamić z przestrzenią wszystkich funkcji  $G/K \rightarrow \mathbb{C}$ . Oznaczając  $\sigma = \text{Ind}_K^G \rho$  mamy dla  $f \in \text{Ind}_K^G \mathbb{C}$  i  $g \in G$

$$(\sigma(g)f)(g'k) = f(g^{-1}g'k), \quad g' \in G, k \in K,$$

a więc  $\sigma(g)f = f \circ \alpha_g^{-1}$ , gdzie  $\alpha : G \rightarrow \text{Perm}(G/K)$  jest kanonicznym działaniem  $G$  na  $G/K$ :

$$\alpha_g(g'K) = gg'K, \quad g, g' \in G.$$

Innymi słowy  $\text{Ind}_K^G \rho$  jest reprezentacją permutacyjną  $G$  na przestrzeni funkcji na  $G/K$ .

**Uwaga 2.7.** Biorąc w przykładzie 2.6  $K = \{e\}$  otrzymujemy  $\text{Ind}_K^G \rho = \lambda$ , gdzie  $\lambda$  jest reprezentacją regularną  $G$ .

### 3. PODSTAWOWE WŁASNOŚCI FUNKTORA INDUKCJI

**Twierdzenie 3.1** (zasada indukcji etapami). *Niech  $H$  będzie podgrupą  $G$ , a  $K$  podgrupą  $H$ . Niech  $\rho \in \text{Rep}(K, V)$ . Wówczas  $\text{Ind}_H^G \text{Ind}_K^H \rho \approx \text{Ind}_K^G \rho$ .*

*Dowód.* Mamy

$$\text{Ind}_K^H V = \{f' : H \rightarrow V \mid \forall h \in H, k \in K \ f'(hk) = \rho(k)^{-1} f'(h)\}$$

i oznaczając  $\sigma = \text{Ind}_K^H \rho$

$$\text{Ind}_H^G \text{Ind}_K^H V = \{f : G \rightarrow \text{Ind}_K^H V \mid \forall g \in G, h \in H \ f(gh) = \sigma(h)^{-1} f(g)\}.$$

Zdefiniujemy nową przestrzeń funkcji:

$$X = \{F : G \times H \rightarrow V \mid \forall g \in G, h, h' \in H, k \in K \ F(gh, h'k) = \rho(k)^{-1} F(g, hh')\}.$$

Dla  $f \in \text{Ind}_H^G \text{Ind}_K^H V$  definiujemy  $Tf : G \times H \rightarrow V$  kładąc

$$(Tf)(g, h) = f(g)(h), \quad g \in G, h \in H.$$

Wówczas  $Tf \in U$ , gdyż

$$\begin{aligned} (Tf)(gh, h'k) &= f(gh)(h'k) \\ &= \rho(k)^{-1} f(gh)(h') && \text{ponieważ } f(gh) \in \text{Ind}_K^H V \\ &= \rho(k)^{-1} (\sigma(h^{-1})f)(g) && \text{ponieważ } f \in \text{Ind}_H^G \text{Ind}_K^H V \\ &= \rho(k)^{-1} f(gh)(hh') \\ &= \rho(k)^{-1} (Tf)(g, hh') \end{aligned}$$

dla dowolnych  $g \in G, h, h' \in H$  i  $k \in K$ .

W ten sposób zdefiniowaliśmy odwzorowanie liniowe  $T : \text{Ind}_H^G \text{Ind}_K^H V \rightarrow U$  i jest jasne, że  $\ker T = \{0\}$ .

Zauważmy dalej, że dla dowolnego  $F \in U$  funkcja

$$G \ni g \mapsto F(g, \cdot)$$

należy do  $\text{Ind}_H^G \text{Ind}_K^H V$ . Istotnie:

- po pierwsze dla ustalonego  $g$  funkcja  $H \ni h \mapsto F(g, h) \in V$  należy do  $\text{Ind}_K^H V$ , jako że

$$F(g, hk) = F(ge, hk) = \rho(k)^{-1} F(g, eh) = \rho(k)^{-1} F(g, h), \quad h \in H, k \in K,$$

- po drugie dla  $h, h' \in H$

$$\begin{aligned} F(gh, \cdot)(h') &= F(gh, h') = F(gh, h'e) \\ &= \rho(e)^{-1} F(g, hh') = F(g, hh') \\ &= F(g, \cdot)(hh') = (\sigma(h^{-1})F(g, \cdot))(h') = (\sigma(h)^{-1} F(g, \cdot))(h'). \end{aligned}$$

Oczywiście odwzorowanie

$$S : U \ni F \mapsto (g \mapsto F(g, \cdot)) \in \text{Ind}_H^G \text{Ind}_K^H V$$

jest odwrotne do  $T$ :

$$TS = \mathbb{1}_U, \quad ST = \mathbb{1}_{\text{Ind}_H^G \text{Ind}_K^H V}.$$

W szczególności przestrzenie  $U$  i  $\text{Ind}_H^G \text{Ind}_K^H V$  są izomorficzne.

Zauważmy teraz, że dla dowolnej  $F \in U$  mamy

$$F(gh, e) = F(gh, e_H e_K) = \rho(e_K)^{-1} F(g, h e_H) = F(g, h),$$

a więc wartości  $F$  na  $G \times H$  są wyznaczone przez jej wartości na  $G \times \{e\}$ . Teraz dla  $F \in U$  zdefiniujemy  $SF : G \rightarrow V$  kładąc

$$(SF)(g) = F(g, e), \quad g \in G.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} (SF)(gk) &= F(gk, e) = F(g, k) \\ &= F(ge, ek) = \rho(k)^{-1} F(g, e) \quad g \in G, k \in K. \\ &= \rho(k)^{-1} (SF)(g), \end{aligned}$$

a więc  $SF \in \text{Ind}_K^G \rho$ . Innymi słowy  $S$  jest odwzorowaniem  $U \rightarrow \text{Ind}_K^G V$  i oczywiście  $\ker S = \{0\}$ . Odwzorowanie  $S$  jest także surjekcją, gdyż dla  $\psi \in \text{Ind}_K^G V$  funkcja  $F_\psi$  zdefiniowana wzorem

$$F_\psi(g, h) = \psi(gh), \quad g \in G, h \in H$$

należy do  $U$ : dla wszystkich  $g \in G, h, h' \in H$  i  $k \in K$  mamy

$$\begin{aligned} F_\psi(gh, h'k) &= \psi(ghh'k) \\ &= \rho(k)^{-1} \psi(ghh') \quad \text{ponieważ } \psi \in \text{Ind}_K^G V \\ &= \rho(k)^{-1} F_\psi(g, hh'), \end{aligned}$$

a ponadto  $SF_\psi = F_\psi(\cdot, e) = \psi(\cdot e) = \psi$ .

Wykazaliśmy więc, że mamy izomorfizmy

$$\text{Ind}_H^G \text{Ind}_K^H V \xrightarrow{T} U \xrightarrow{S} \text{Ind}_K^G V.$$

Oznaczmy  $\alpha = \text{Ind}_K^G \rho$ ,  $\gamma = \text{Ind}_H^G \text{Ind}_K^H \rho$  i  $\Theta = ST$ . Pokażemy, że operator  $\Theta$  splata  $\alpha$  i  $\gamma$ . Zaczniemy od tego, że dla  $f \in \text{Ind}_H^G \text{Ind}_K^H V$  mamy

$$(\Theta f)(g) = (Tf)(g, e) = f(g)(e), \quad g \in G.$$

Zatem dla  $g_1, g_2 \in G$  mamy

$$\begin{aligned} (\alpha(g_1)\Theta f)(g_2) &= (\Theta f)(g_1^{-1}g_2) = f(g_1^{-1}g_2)(e) \\ &= (\gamma(g_1)f)(g_2)(e) = (\Theta\gamma(g_1)f)(g_2), \end{aligned} \quad f \in \text{Ind}_H^G \text{Ind}_K^H V,$$

a więc  $\alpha(g_2)\Theta = \Theta\gamma(g_1)$ . □

Dla dowolnych dwóch reprezentacji  $\alpha \in \text{Rep}(G, V)$  i  $\beta \in \text{Rep}(G, W)$  symbolem  $\text{Hom}_G(\alpha, \beta)$  będziemy oznaczać przestrzeń operatorów splatających reprezentacje  $\alpha$  i  $\beta$ . Dalej, dla podgrupy  $K \subset G$  symbolem  $\text{Res}_K^G \alpha$  będziemy oznaczać obcięcie reprezentacji  $\alpha$  do  $K$ .

**Twierdzenie 3.2** (wzajemność Frobeniusa). *Niech  $K$  będzie podgrupą  $G$  i niech  $\rho \in \text{Rep}(K, V)$  oraz  $\sigma \in \text{Rep}(G, W)$ . Wówczas przestrzenie*

$$\text{Hom}_G(\sigma, \text{Ind}_K^G \rho) \quad \text{oraz} \quad \text{Hom}_K(\text{Res}_K^G \sigma, \rho)$$

są naturalnie izomorficzne.

*Dowód.* Niech  $T \in \text{Hom}_G(\sigma, \text{Ind}_K^G \rho)$ . Wówczas dla dowolnego  $w \in W$  wektor  $Tw$  należy do przestrzeni

$$\text{Ind}_K^G V = \{f : G \rightarrow V \mid \forall g \in G, k \in K \ f(gk) = \rho(k)^{-1} f(g)\}.$$

Definiujemy  $\hat{T} : W \rightarrow V$  kładąc

$$\hat{T}w = (Tw)(e), \quad w \in W.$$

Dla  $w \in W$  i  $k \in K$  mamy

$$\begin{aligned}
 \hat{T}(\sigma(k)w) &= (T\sigma(k)w)(e) && \text{z definicji } \hat{T} \\
 &= ((\text{Ind}_K^G \rho)(k)Tw)(e) && \text{ponieważ } T \in \text{Hom}_G(\sigma, \text{Ind}_K^G \rho) \\
 &= (Tw)(k^{-1}) && \text{z definicji } \text{Ind}_K^G \rho \\
 &= \rho(k)(Tw)(e) && \text{z definicji } \text{Ind}_K^G V \\
 &= \rho(k)(\hat{T}w).
 \end{aligned}$$

Innymi słowy  $\hat{T} \in \text{Hom}_K(\text{Res}_K^G \sigma, \rho)$ .

Teraz niech  $S \in \text{Hom}_K(\text{Res}_K^G \sigma, \rho)$ . Dla  $w \in W$  zdefiniujmy funkcję  $\check{S}w : G \rightarrow V$  kładąc

$$(\check{S}w)(g) = S\sigma(g)^{-1}w, \quad g \in G.$$

Sprawdźmy, że  $\check{S}w$  należy do  $\text{Ind}_K^G V$ : dla  $g \in G$  i  $k \in K$  mamy

$$\begin{aligned}
 (\check{S}w)(gk) &= S\sigma(gk)^{-1}w = S\sigma(k)^{-1}\sigma(g)^{-1}w \\
 &= \rho(k)^{-1}S\sigma(g)^{-1}w && \text{ponieważ } S \in \text{Hom}_K(\text{Res}_K^G \sigma, \rho) \\
 &= \rho(k)^{-1}(\check{S}w)(g).
 \end{aligned}$$

Tak więc  $\check{S}$  jest operatorem  $W \rightarrow \text{Ind}_K^G V$ . Ponadto splata on reprezentacje  $\sigma$  i  $\text{Ind}_K^G \rho$ : dla  $w \in W$  i  $g, h \in G$

$$\begin{aligned}
 ((\text{Ind}_K^G \rho)(g)\check{S}w)(h) &= (\check{S}w)(g^{-1}h) && \text{z definicji } \text{Ind}_K^G \rho \\
 &= S\sigma(g^{-1}h)^{-1}w && \text{z definicji } \hat{S} \\
 &= S\sigma(h^{-1}g)w \\
 &= S\sigma(h^{-1})\sigma(g)w \\
 &= (\check{S}\sigma(g)w)(h).
 \end{aligned}$$

Innymi słowy  $\check{S} \in \text{Hom}_G(\sigma, \text{Ind}_K^G \rho)$ .

Zdefiniowaliśmy operacje

$$\begin{array}{ccc}
 & T \longmapsto \hat{T} & \\
 \text{Hom}_G(\sigma, \text{Ind}_K^G \rho) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_K(\text{Res}_K^G \sigma, \rho) \\
 & \check{S} \longleftarrow S &
 \end{array}$$

Pozostaje wykazać, że są one wzajemnie odwrotne: dla  $S \in \text{Hom}_K(\text{Res}_K^G \sigma, \rho)$  i  $w \in W$  mamy

$$\hat{\check{S}}w = (\check{S}w)(e) = S\sigma(e)^{-1}w = Sw,$$

czyli  $\hat{\check{S}} = S$ . Podobnie, dla  $T \in \text{Hom}_G(\sigma, \text{Ind}_K^G \rho)$ ,  $w \in W$  i  $g \in G$

$$(\check{\hat{T}}w)(g) = \hat{T}\sigma(g)^{-1}w = (T\sigma(g)^{-1}w)(e) = (T\sigma(g^{-1})w)(e) = (\text{Ind}_K^G \rho(g^{-1})Tw)(e) = (Tw)(g),$$

a więc mamy także  $\check{\hat{T}} = T$  dla wszystkich  $T \in \text{Hom}_G(\sigma, \text{Ind}_K^G \rho)$ .  $\square$

**Uwaga 3.3.** Wzajemność Frobeniusa pozwala podać krótki dowód zasady indukcji etapami. Aby to zobaczyć oznaczmy przez  $\text{Irr } G$  zbiór reprezentantów wszystkich klas równoważności nieprzywiedlnych reprezentacji grupy  $G$ . Dalej niech  $H$  będzie podgrupą  $G$ , a  $K$  podgrupą  $H$  i niech

$\rho \in \text{Rep}(K, V)$ . Wówczas

$$\begin{aligned}
\text{Ind}_H^G \text{Ind}_K^H \rho &\approx \bigoplus_{\alpha \in \text{Irr } G} \dim \text{Hom}_G(\alpha, \text{Ind}_H^G \text{Ind}_K^H \rho) \cdot \alpha \\
&= \bigoplus_{\alpha \in \text{Irr } G} \dim \text{Hom}_H(\text{Res}_H^G \alpha, \text{Ind}_K^H \rho) \cdot \alpha \\
&= \bigoplus_{\alpha \in \text{Irr } G} \dim \text{Hom}_K(\text{Res}_K^H \text{Res}_H^G \alpha, \rho) \cdot \alpha \\
&= \bigoplus_{\alpha \in \text{Irr } G} \dim \text{Hom}_K(\text{Res}_K^G \alpha, \rho) \cdot \alpha \\
&= \bigoplus_{\alpha \in \text{Irr } G} \dim \text{Hom}_G(\alpha, \text{Ind}_K^G \rho) \cdot \alpha \approx \text{Ind}_K^G \rho.
\end{aligned}$$

#### 4. UNITARNOŚĆ I CHARAKTER REPREZENTACJI INDUKOWANEJ

**Stwierdzenie 4.1.** *Niech  $\rho \in \text{Rep}(G, V)$  będzie reprezentacją unitarną i oznaczmy iloczyn skalarny w  $V$  symbolem  $\langle \cdot | \cdot \rangle_V$ . Wtedy*

(1) *wzór*

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \frac{1}{|K|} \sum_{g \in G} \langle f_1(g) | f_2(g) \rangle_V$$

*definiuje iloczyn skalarny na  $\text{Ind}_K^G V$ , względem którego reprezentacja  $\text{Ind}_K^G \rho$  jest unitarna.*

(2) *Niech  $\{e_1, \dots, e_n\}$  będzie bazą ortonormalną  $V$  i niech  $\mathcal{S}$  będzie układem reprezentantów warstw  $K$  w  $G$ . Wtedy wektory,*

$$f_{s,j} = \sigma(s)f_{e_j}, \quad s \in \mathcal{S}, j = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

*tworzą bazę ortonormalną przestrzeni  $\text{Ind}_K^G V$ .*

*Dowód.* Jest jasne, że  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  jest iloczynem skalarnym na  $\text{Ind}_K^G V$ . Niech  $\sigma$  oznacza reprezentację  $\text{Ind}_K^G \rho$ . Dla dowolnego  $g \in G$  oraz  $f_1, f_2 \in V$  mamy

$$\begin{aligned}
\langle \sigma(g)f_1 | \sigma(g)f_2 \rangle &= \frac{1}{|K|} \sum_{g' \in G} \langle (\sigma(g)f_1)(g') | (\sigma(g)f_2)(g') \rangle_V \\
&= \frac{1}{|K|} \sum_{g' \in G} \langle f_1(g^{-1}g') | f_2(g^{-1}g') \rangle_V \\
&= \frac{1}{|K|} \sum_{g'' \in G} \langle f_1(g'') | f_2(g'') \rangle_V = \langle f_1 | f_2 \rangle,
\end{aligned}$$

a więc  $\sigma$  jest reprezentacją unitarną.

Niech  $V_0 = \{f_v \mid v \in V\}$ , gdzie

$$f_v(g) = \begin{cases} \rho(g)^{-1} & g \in K, \\ 0 & g \notin K, \end{cases} \quad g \in G.$$

Wówczas dla dowolnych  $v, w \in V$  mamy

$$\begin{aligned}
\langle f_v | f_w \rangle &= \frac{1}{|K|} \sum_{g \in G} \langle f_v(g) | f_w(g) \rangle_V \\
&= \frac{1}{|K|} \sum_{g \in K} \langle \rho(g)^{-1}v | \rho(g)^{-1}w \rangle_V \\
&= \frac{1}{|K|} \sum_{g \in K} \langle v | w \rangle_V = \langle v | w \rangle_V
\end{aligned}$$

ponieważ  $\rho$  jest reprezentacją unitarną. Wynika stąd, że  $v \mapsto f_v$  jest izometrią i w konsekwencji układ

$$\{f_{e_1}, \dots, f_{e_n}\}$$

jest bazą ortonormalną  $V_0$ .

Wiemy, że  $\text{Ind}_K^G V = \bigoplus_{s \in \mathcal{S}} \sigma(s)V_0$  i dla każdego  $s$  odwzorowanie  $\sigma(s)$  jest unitarne, a stąd układ

$$\{f_{s,i}, \dots, f_{s,n}\} = \{\sigma(s)f_{e_1}, \dots, \sigma(s)f_{e_n}\}$$

jest bazą ortonormalną  $\sigma(s)V_0$ . Aby przekonać się, że (4.1) wystarczy wykazać, że dla różnych  $s, s' \in \mathcal{S}$  mamy  $\sigma(s)V_0 \perp \sigma(s')V_0$ . Weźmy więc  $v, w \in V$  i  $s, s' \in \mathcal{S}$  takie, że  $s \neq s'$ . Wtedy

$$\langle \sigma(s)f_v | \sigma(s')f_w \rangle = \frac{1}{|K|} \sum_{g \in G} \langle f_v(s^{-1}g) | f_w(s'^{-1}g) \rangle_V = 0,$$

ponieważ funkcja  $g \mapsto f_v(s^{-1}g)$  ma nośnik w warstwie  $sK$ , a funkcja  $g \mapsto f_w(s'^{-1}g)$  ma nośnik w warstwie  $s'K$ .  $\square$

**Uwaga 4.2.** Niech – jak zwykle –  $K$  będzie podgrupą  $G$  i niech  $\rho \in \text{Rep}(K, V)$ . Dalej niech  $\sigma = \text{Ind}_K^G \rho$  i niech  $v, w \in V$ . Wówczas dla dowolnego  $g \in G$  mamy

$$\begin{aligned} \langle f_v | \sigma(g)f_w \rangle &= \frac{1}{|K|} \sum_{g' \in G} \langle f_v(g') | f_w(g^{-1}g') \rangle_V \\ &= \frac{1}{|K|} \sum_{g' \in K} \langle f_v(g') | f_w(g^{-1}g') \rangle_V \\ &= \begin{cases} \frac{1}{|K|} \sum_{g' \in K} \langle \rho(g')^{-1}v | \rho(g')^{-1}\rho(g)w \rangle_V & g \in K, \\ 0 & g \notin K \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{|K|} \sum_{g' \in K} \langle v | \rho(g)w \rangle_V & g \in K, \\ 0 & g \notin K \end{cases} \\ &= \begin{cases} \langle v | \rho(g)w \rangle_V & g \in K, \\ 0 & g \notin K. \end{cases} \end{aligned}$$

**Twierdzenie 4.3.** Niech  $K$  będzie podgrupą  $G$  i niech  $\rho \in \text{Rep}(K, V)$ . Wtedy

$$\chi_{\text{Ind}_K^G \rho}(g) = \frac{1}{|K|} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1}gt \in K}} \chi_\rho(t^{-1}gt), \quad g \in G. \quad (4.2)$$

*Dowód.* Możemy przyjąć, że  $\rho$  jest unitarna. Wtedy  $\sigma = \text{Ind}_K^G \rho$  także jest unitarna dla iloczynu skalarnego zdefiniowanego w twierdzeniu 4.1(1). Dalej niech  $\mathcal{S}$  będzie układem reprezentantów warstw  $K$  w  $G$  i niech  $\{f_{s,j} | s \in \mathcal{S}, j = 1, \dots, n\}$  będzie bazą ortonormalną  $\text{Ind}_K^G V$  skonstruowaną w twierdzeniu 4.1(2). Korzystając z wzoru opisanego w uwadze 4.2 obliczamy dla  $g \in G$ :

$$\begin{aligned} \chi_{\text{Ind}_K^G \rho}(g) &= \chi_\sigma(g) = \text{Tr}(\sigma(g)) \\ &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{j=1}^n \langle f_{s,j} | \sigma(g)f_{s,j} \rangle \\ &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{j=1}^n \langle \sigma(s)f_{e_j} | \sigma(g)\sigma(s)f_{e_j} \rangle \\ &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{j=1}^n \langle f_{e_j} | \sigma(s^{-1}gs)f_{e_j} \rangle \\ &= \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ s^{-1}gs \in K}} \sum_{j=1}^n \langle e_j | \rho(s^{-1}gs)e_j \rangle_V \\ &= \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ s^{-1}gs \in K}} \text{Tr}(\rho(s^{-1}gs)) = \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ s^{-1}gs \in K}} \chi_\rho(s^{-1}gs). \end{aligned}$$

Weźmy teraz dowolny element  $t \in G$  i zapiszmy go w postaci  $t = sk$  dla pewnego  $s \in \mathcal{S}$  i  $k \in K$ . Wówczas

$$(t^{-1}gt \in K) \iff (s^{-1}gs \in K)$$

i dla  $t$  spełniających ten warunek

$$\chi_\rho(t^{-1}gt) = \chi_\rho(k^{-1}s^{-1}gsk) = \chi_\rho(s^{-1}gs).$$

Stąd natychmiast otrzymujemy wzór (4.2). □

## 5. OBCIĘCIA DO PODGRUP I KRYTERIUM NIEPRZYWIEDLNOŚCI

Niech  $H$  i  $K$  będą podgrupami  $G$ . Wówczas relacja  $\sim$  zdefiniowana przez

$$(g \sim g') \iff (\exists h \in H, k \in K \ g' = h g k), \quad g, g' \in G$$

jest relacją równoważności, a jej klasy abstrakcji – zwane *warstwami podwójnymi*  $H$  i  $K$  w  $G$  – są postaci

$$HgK = \{h g k \mid h \in H, k \in K\}, \quad g \in G.$$

Niech  $\mathcal{T}$  będzie układem reprezentantów warstw podwójnych  $H$  i  $K$  w  $G$ :

$$G = \bigsqcup_{t \in \mathcal{T}} HtK.$$

Niech  $\rho \in \text{Rep}(K, V)$ . Dla  $t \in \mathcal{T}$  przyjmijmy  $H_t = H \cap tKt^{-1}$ . Wówczas  $H_t$  jest podgrupą  $H$ , a wzór

$$\rho_t(u) = \rho(t^{-1}ut), \quad u \in H_t$$

definiuje reprezentację  $H_t$  na  $V$ .

**Twierdzenie 5.1.** *Mamy  $\text{Res}_H^G \text{Ind}_K^G \rho \approx \bigoplus_{t \in \mathcal{T}} \text{Ind}_{H_t}^H \rho_t$ .*

*Dowód.* Oznaczmy  $Z = \text{Ind}_K^G V$  i  $\sigma = \text{Ind}_K^G \rho$ . Dla  $t \in \mathcal{T}$  niech

$$Z_t = \text{span}\{\sigma(g)V_0 \mid g \in HtK\} = \text{span}\{\sigma(h)\sigma(t)V_0 \mid h \in H\},$$

gdzie  $V_0 = \{f_v \mid v \in V\}$ .

Mamy oczywiście  $Z = \bigoplus_{t \in \mathcal{T}} Z_t$  (podprzestrzenie te są nawet ortogonalne dla iloczynu skalarnego opisanego w części 4).

Jest jasne, że każda z podprzestrzeni  $Z_t$  jest  $H$ -niezmiennicza. Pokażemy, że podreprezentacja  $\text{Res}_H^G \sigma$  odpowiadająca tej podprzestrzeni jest równoważna  $\text{Ind}_{H_t}^H \rho_t$ .

(1) Podprzestrzeń  $\sigma(t)V_0 \subset Z_t$  jest  $H_t$ -niezmiennicza i dla  $u \in H_t$  mamy

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{v \mapsto f_v} & V_0 & \xrightarrow{\sigma(t)} & \sigma(t)V_0 \\ \rho(t^{-1}ut) = \rho_t(u) \downarrow & & \downarrow \sigma(t^{-1}ut) & & \downarrow \sigma(u) = (\text{Res}_H^G \sigma)(u) \\ V & \xrightarrow{v \mapsto f_v} & V_0 & \xrightarrow{\sigma(t)} & \sigma(t)V_0 \end{array}$$

a więc odpowiednia reprezentacja  $H_t$  jest równoważna  $\rho_t$ .

(2) Niech  $\mathcal{S}_t$  będzie układem reprezentantów warstw  $H_t$  w  $H$ . Wtedy

$$Z_t = \bigoplus_{s \in \mathcal{S}_t} (\text{Res}_H^G \sigma)(s)(\sigma(t)V_0).$$

Punkty (1) i (2) gwarantują, na mocy stwierdzenia 2.5, że podreprezentacja reprezentacji  $\text{Res}_H^G \sigma$  odpowiadająca podprzestrzeni  $Z_t$  jest równoważna  $\text{Ind}_{H_t}^H \rho_t$ . □

**Uwaga 5.2.** Opisany w Twierdzeniu 5.1 rozkład reprezentacji  $\text{Res}_H^G \text{Ind}_K^G \rho$  z dokładnością do równoważności nie zależy od wyboru układu reprezentantów warstw podwójnych  $H$  i  $K$  w  $G$ . Przeanalizujmy ten fakt w szczególnym przypadku, gdy  $H = K$ : niech  $t \in G$  i  $s = k_1 t k_2$  dla pewnych  $k_1, k_2 \in K$ . Wówczas

$$K_s = K \cap k_1 t k_2 K k_2^{-1} t^{-1} k_1^{-1} = K \cap k_1 t K t^{-1} k_1^{-1} = k_1 (K \cap t K t^{-1}) k_1^{-1} = k_1 K_t k_1^{-1} = \phi(K_t),$$

gdzie  $\phi = \text{Ad}_{k_1} \in \text{Inn}(G)$ . Dalej, dla  $a \in K_s$  mamy

$$\begin{aligned} \rho_s(a) &= \rho(s^{-1} a s) = \rho(k_2^{-1} t^{-1} k_1^{-1} a k_1 t k_2) \\ &= \rho(k_2)^{-1} \rho(t^{-1} \phi^{-1}(a) t) \rho(k_2) = \rho(k_2)^{-1} \rho_t(\phi^{-1}(a)) \rho(k_2). \end{aligned}$$

Oznacza to, że  $\rho_s \approx \rho_t \circ \phi^{-1}$ , a stąd, na mocy uwagi 2.1(3) otrzymujemy

$$\text{Ind}_{K_t}^G \rho_t \approx \text{Ind}_{K_s}^G \rho_s.$$

## 6. TEORIA MACKEYA

**Twierdzenie 6.1** (Kryterium nieprzywiedlności Mackeya). *Niech  $K$  będzie podgrupą  $G$  i niech  $\rho \in \text{Rep}(K, V)$ . Reprezentacja  $\text{Ind}_K^G \rho$  jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy  $\rho$  jest nieprzywiedlna i dla każdego  $t \in G \setminus K$  reprezentacje  $\rho_t$  i  $\text{Res}_{K_t}^K \rho$  są rozłączne.*

*Dowód.* Dla każdej reprezentacji  $\sigma$  grupy  $G$  mamy

$$\text{Hom}_G(\sigma, \text{Ind}_K^G \rho) \cong \text{Hom}_K(\text{Res}_K^G \sigma, \rho),$$

a więc, wstawiając do powyższego wzoru  $\sigma = \text{Ind}_K^G \rho$ , otrzymujemy

$$\text{Hom}_G(\text{Ind}_K^G \rho, \text{Ind}_K^G \rho) \cong \text{Hom}_K(\text{Res}_K^G \text{Ind}_K^G \rho, \rho), \quad (6.1)$$

Reprezentacja  $\text{Ind}_K^G \rho$  jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy wymiar przestrzeni po lewej stronie (6.1) jest równy 1.

Twierdzenie 5.1 mówi, że

$$\text{Res}_K^G \text{Ind}_K^G \rho \approx \bigoplus_{t \in \mathcal{T}} \text{Ind}_{K_t}^K \rho_t,$$

gdzie  $\mathcal{T}$  jest układem reprezentantów warstw podwójnych  $K$  w  $G$  i dla  $t \in \mathcal{T}$  mamy

$$K_t = K \cap t K t^{-1} \quad \text{oraz} \quad \rho_t(x) = \rho(t^{-1} x t), \quad x \in K_t.$$

Stąd

$$\text{Hom}_G(\text{Ind}_K^G \rho, \text{Ind}_K^G \rho) \cong \bigoplus_{t \in \mathcal{T}} \text{Hom}_K(\text{Ind}_{K_t}^K \rho_t, \rho) \cong \bigoplus_{t \in \mathcal{T}} \text{Hom}_{K_t}(\rho_t, \text{Res}_{K_t}^K \rho).$$

W zbiorze  $\mathcal{T}$  jest dokładnie jeden element  $k$  należący do podgrupy  $K$  (reprezentant trywialnej warstwy podwójnej), więc

$$\begin{aligned} \text{Hom}_G(\text{Ind}_K^G \rho, \text{Ind}_K^G \rho) &\cong \bigoplus_{t \in \mathcal{T}} \text{Hom}_{K_t}(\rho_t, \text{Res}_{K_t}^K \rho) \\ &\cong \text{Hom}_{K_k}(\rho_k, \text{Res}_{K_k}^K \rho) \oplus \bigoplus_{t \in \mathcal{T} \setminus K} \text{Hom}_{K_t}(\rho_t, \text{Res}_{K_t}^K \rho). \end{aligned}$$

Oczywiście  $K_k = K$  i  $\text{Res}_{K_k}^K \rho_k = \rho$ . Ponadto  $\rho_k \approx \rho$ , gdyż

$$\rho_k(x) = \rho(k^{-1} x k) = \rho(k)^{-1} \rho(x) \rho(k), \quad x \in K.$$

W konsekwencji otrzymujemy

$$\dim \text{End}(\text{Ind}_K^G \rho) = \dim \text{End}(\rho) + \sum_{t \in \mathcal{T} \setminus K} \dim \text{Hom}_{K_t}(\rho_t, \text{Res}_{K_t}^K \rho).$$

□

**Uwaga 6.2.** Rozważmy ważny szczególny przypadek, a mianowicie sytuację, gdy  $K$  jest podgrupą normalną. Wówczas  $K_t = K$  dla wszystkich  $t \in G$  i  $\text{Ind}_K^G \rho$  jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy  $\rho$  jest nieprzywiedlna i dla każdego  $t \in G \setminus K$  reprezentacje  $\rho$  i  $\rho^t = \rho \circ \text{Ad}_t$  są rozłączne.

**6.1. Reprezentacje iloczynów półprostych grupy przemiennej.** Niech  $G = A \rtimes H$ , gdzie  $A$  jest grupą przemienną. Innymi słowy  $G$  zawiera dwie podgrupy  $A$  i  $H$ , przy czym  $A$  jest przemienna i normalna,  $A \cap H = \{e\}$  i  $G = AH$ .

Niech  $\hat{A}$  oznacza grupę charakterów  $A$ . Rozważmy działanie  $H$  na  $\hat{A}$  zdefiniowane wzorem

$$(h \cdot \chi)(a) = \chi(h^{-1}ah), \quad a \in A, \chi \in \hat{A}, h \in H$$

(jest to działanie dwoiste do działania  $H$  na  $A$ ). Podgrupę izotropii  $\chi \in \hat{A}$  będziemy oznaczać symbolem  $H_\chi$ .

Ustalmy  $\chi \in \hat{A}$  i zdefiniujmy podgrupę  $K_\chi \subset G$ :

$$K_\chi = AH_\chi = \{ah \mid a \in A, h \in H_\chi\}.$$

Zbiór  $K_\chi$  istotnie jest podgrupą, gdyż dla  $a, a' \in A$  i  $h, h' \in H_\chi$  mamy

$$aha'h' = aha'h^{-1}hh' = (aha'h^{-1})hh' \in AH_\chi = K_\chi.$$

Oczywiście  $K_\chi$  jest iloczynem półprostym  $K_\chi = A \rtimes H_\chi$ .

Ustalmy reprezentację  $\rho \in \text{Rep}(H_\chi, V)$  i zdefiniujmy  $\rho_\chi \in \text{Rep}(K_\chi, V)$  kładąc

$$\rho_\chi(ah) = \chi(a)\rho(h), \quad a \in A, h \in H_\chi.$$

Łatwo sprawdzamy, że  $\rho_\chi$  jest odwzorowaniem mnożącym: dla  $a, a' \in A$  i  $h, h' \in H_\chi$  mamy

$$\begin{aligned} \rho_\chi(aha'h') &= \rho_\chi((aha'h^{-1})hh') = \chi(aha'a^{-1})\rho(hh') \\ &= \chi(a)\chi(ha'h^{-1})\rho(h)\rho(h') \\ &= \chi(a)\chi(a')\rho(h)\rho(h') \\ &= \chi(a)\rho(h)\chi(a')\rho(h') = \rho_\chi(ah)\rho_\chi(a'h'). \end{aligned}$$

Wreszcie zdefiniujmy najważniejszy obiekt niniejszej części:

$$\pi_{\chi, \rho} = \text{Ind}_{K_\chi}^G \rho_\chi.$$

**Uwaga 6.3.** Skonstruowana powyżej reprezentacja  $\pi_{\chi, \rho}$  zależy (z dokładnością do równoważności) nie tyle od  $\chi$ , ile od orbity  $\chi$  pod działaniem  $H$ . Dokładniej niech  $\chi' = s \cdot \chi$  dla pewnego  $s \in H$ . Wtedy  $H_{\chi'} = sH_\chi s^{-1}$ , a więc kładąc  $\phi = \text{Ad}_s$  otrzymujemy  $K_{\chi'} = \phi(K_\chi)$ . Ponadto dla  $ah \in AH_{\chi'} = K_{\chi'}$  mamy

$$\begin{aligned} \rho_\chi(\phi^{-1}(ah)) &= \rho_\chi(s^{-1}ass^{-1}hs) = \chi(s^{-1}as)\rho(s^{-1}hs) \\ &= (s \cdot \chi)(a)\rho(s^{-1}hs) = \chi'(a)\rho(s)^{-1}\rho(h)\rho(s) \\ &= \rho(s)^{-1}\chi'(a)\rho(h)\rho(s) = \rho(s)^{-1}\rho_{\chi'}(ah)\rho(s), \end{aligned}$$

czyli  $\rho_{\chi'} \approx \rho_\chi \circ \phi^{-1}$ . Na mocy uwagi 2.1(3) mamy więc  $\pi_{\chi, \rho} \approx \pi_{\chi', \rho}$ .

Oczywiście jeśli  $\rho' \in \text{Rep}(H_\chi, W)$  i  $\rho' \approx \rho$ , to oczywiście  $\rho_\chi \approx \rho'_\chi$ , więc także  $\pi_{\chi, \rho} \approx \pi_{\chi, \rho'}$ .

**Twierdzenie 6.4.** Niech  $\xi, \eta \in \hat{A}$  i  $\gamma \in \text{Rep}(H_\xi, U)$ ,  $\rho \in \text{Rep}(H_\eta, V)$  będą takie, że  $\pi_{\xi, \gamma} \approx \pi_{\eta, \rho}$ . Wówczas  $\xi$  i  $\eta$  należą do tej samej orbity działania  $H$  i utożsamiając  $H_\xi$  z  $H_\eta$  mamy  $\gamma \approx \rho$ .

*Dowód.* Ustalmy  $\eta \in \hat{A}$  oraz  $\rho \in \text{Rep}(H_\eta, V)$  i oznaczmy przez  $\pi$  reprezentację  $\pi_{\eta, \rho}$ . Wystarczy wykazać, że orbitę  $\eta$  i klasę równoważności  $\rho$  można wyznaczyć w oparciu o informacje zawarte w reprezentacji  $\pi$ .

(1) Mamy

$$\chi_\pi(g) = \frac{1}{|K_\eta|} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1}gt \in K_\eta}} \chi_{\rho_\eta}(t^{-1}gt), \quad g \in G.$$

Zastosujemy ten wzór do  $g = a \in A$ . Wtedy dla każdego  $t \in G$  mamy  $t^{-1}at \in A \subset K_\eta$ , a ponadto

$$\chi_{\rho_\eta}(t^{-1}at) = \text{Tr}(\rho_\eta(t^{-1}at)) = \text{Tr}(\eta(t^{-1}at)\rho(e)) = (\dim \rho)(t \cdot \eta)(a),$$

przy czym rozszerzyliśmy działanie  $H$  na  $\hat{A}$  do działania  $G = AH$  na  $\hat{A}$  danego tym samym wzorem, tj.  $(ah) \cdot \chi = h \cdot \chi$  dla wszystkich  $a \in A$ ,  $h \in H$  i  $\chi \in \hat{A}$  – w szczególności orbity tego działania są takie same jak działania  $H$ . Stąd

$$\chi_\pi(a) = \frac{\dim \rho}{|K_\eta|} \sum_{t \in G} (t \cdot \eta)(a).$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że w powyższej sumie składnik  $(t \cdot \eta)(a)$  zależy jedynie od warstwy podgrupy  $K_\eta$  do której należy element  $t$ . Innymi słowy

$$\chi_\pi(a) = (\dim \rho) \sum_{s \in \mathcal{S}} (s \cdot \eta)(a)$$

gdzie  $\mathcal{S}$  jest układem reprezentantów warstw  $K_\eta$  w  $G$ . Ponieważ  $K_\eta$  jest podgrupą izotropii  $\eta$  (po rozszerzeniu działania z  $H$  na  $G$ ) widzimy, że  $\text{Res}_A^G \pi$  jest sumą prostą reprezentacji tworzących orbitę  $\eta$  przy działaniu  $H$  (wszystkich, każdej z krotnością  $\dim \rho$ ). Tak więc orbitę  $\rho$  można wyznaczyć w oparciu o informacje zawarte w  $\pi$ .

- (2) Ponieważ reprezentacja  $\pi$  wyznacza orbitę charakteru  $\eta$ , możemy wybrać dowolny  $\xi$  z tej orbity i przyjąć, że  $\pi = \pi_{\xi, \rho}$  dla pewnego  $\rho \in \text{Rep}(H_\xi, V)$  (bo  $\pi_{\eta, \rho} \approx \pi_{\xi, \rho}$ , gdy  $\eta$  i  $\xi$  są w tej samej orbicie).

Niech  $Z$  będzie przestrzenią reprezentacji  $\pi$ , tj.  $Z = \text{Ind}_{K_\xi}^G \rho$ . Przypomnijmy, że odwzorowanie  $T : V \rightarrow Z$  zdefiniowane jako  $Tv = f_v$ , gdzie

$$f_v(g) = \begin{cases} \rho_\xi(g)^{-1} & g \in K_\xi, \\ 0 & g \notin K_\xi \end{cases}$$

jest injekcją i dla każdego  $k \in K_\xi$  mamy  $\pi(k)T = T\rho_\xi(g)$ . W szczególności

$$\pi(h)T = T\rho(h), \quad h \in H_\xi.$$

Teraz niech

$$X = \{z \in Z \mid \forall a \in A \pi(a)z = \xi(a)z\}.$$

Wówczas  $X$  jest podprzestrzenią, która jest  $H_\xi$ -niezmiennicza: dla  $z \in X$ ,  $a \in A$ ,  $h \in H_\xi$  i  $g \in G$  mamy

$$\begin{aligned} (\pi(a)(\pi(h)z))(g) &= (\pi(ah)z)(g) = z((ah)^{-1}g) \\ &= z(h^{-1}a^{-1}g) = z(h^{-1}a^{-1}hh^{-1}g) \\ &= (\pi(h^{-1}ah)z)(h^{-1}g) = \xi(h^{-1}ah)z(h^{-1}g) \\ &= (h \cdot \xi)(a)z(h^{-1}g) = \xi(a)z(h^{-1}g) = \xi(a)(\pi(h)z)(g). \end{aligned}$$

Co więcej,  $X$  zawiera obraz odwzorowania  $T$ : dla dowolnych  $a \in A$ ,  $v \in V$  i  $g \in G$  mamy

$$\begin{aligned} (\pi(a)f_v)(g) &= f_v(a^{-1}g) = \begin{cases} \rho_\xi(a^{-1}g)^{-1}v & a^{-1}g \in K_\xi, \\ 0 & a^{-1}g \notin K_\xi \end{cases} \\ &= \begin{cases} \rho_\xi(a^{-1}g)^{-1}v & g \in K_\xi, \\ 0 & g \notin K_\xi \end{cases} \quad \text{bo } a^{-1}g \in K_\xi \Leftrightarrow g \in K_\xi \\ &= \begin{cases} \rho_\xi(g)^{-1}\rho_\xi(a)v & g \in K_\xi, \\ 0 & g \notin K_\xi \end{cases} \\ &= \xi(a) \cdot \begin{cases} \rho_\xi(g)^{-1}v & g \in K_\xi, \\ 0 & g \notin K_\xi \end{cases} \\ &= \xi(a)f_v(g). \end{aligned}$$

Z drugiej strony dla  $z \in X$ ,  $a \in A$  i  $g \in G$  mamy

$$\begin{aligned} \xi(a)z(g) &= (\pi(a)z)(g) = z(a^{-1}g) = z(gg^{-1}a^{-1}g) = \rho_\xi(g^{-1}a^{-1}g)^{-1}z(g) \\ &= \rho_\xi(g^{-1}ag)z(g) = \xi(g^{-1}ag)z(g) = (g \cdot \xi)(a)z(g) \end{aligned}$$

(czwarta równość wynika z tego, że  $z \in Z$ ), a więc jeśli  $g \notin K_\xi$ , to  $(g \cdot \xi)(a) \neq a$  dla pewnego  $a$ , więc musi być  $z(g) = 0$ . Innymi słowy do  $X$  należą tylko funkcje o nośniku zawartym w  $K_\xi$ , co na mocy uwagi 2.4 pokazuje, że  $X$  pokrywa się z obrazem  $T$ .

Wiemy, że para  $(\pi, \text{im } T)$  wyznacza reprezentację  $\rho$  z dokładnością do równoważności, więc  $(\pi, \xi)$  także ją wyznacza (bo  $\text{im } T = X$ ).

□

**Twierdzenie 6.5.** *Niech reprezentacja  $\rho \in \text{Rep}(H_\chi, V)$  będzie nieprzywiedlna. Wtedy reprezentacja  $\pi_{\chi, \rho}$  także jest nieprzywiedlna.*

*Dowód.* Aby przekonać się o nieprzywiedlności  $\pi_{\chi, \rho} = \text{Ind}_{K_\chi}^G \rho_\chi$  skorzystamy z kryterium nieprzywiedlności Mackeya (twierdzenie 6.1). Mówi ono, że  $\pi_{\chi, \rho}$  jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy  $\rho_\chi$  jest nieprzywiedlna i dla każdego  $t \in G \setminus K_\chi$  reprezentacje

$$\begin{aligned} \rho' : K_\chi \cap tK_\chi t^{-1} \ni x &\longmapsto \rho_\chi(t^{-1}xt), \\ \rho'' : K_\chi \cap tK_\chi t^{-1} \ni x &\longmapsto \rho_\chi(x) \end{aligned}$$

są rozłączne.

Reprezentacja  $\rho_\chi$  jest nieprzywiedlna, gdyż  $\rho$  jest nieprzywiedlna. Pozostaje więc wykazać rozłączność  $\rho'$  i  $\rho''$ . Jeśli  $\rho'$  i  $\rho''$  miałyby wspólną podreprezentację, to ich obcięcia do  $A \subset K_\chi \cap tK_\chi t^{-1}$  także miałyby wspólną podreprezentację, tj. nie byłyby rozłączne. Możemy zatem ograniczyć się do sprawdzenia, że obcięcia  $\rho'$  i  $\rho''$  do  $A$  są rozłączne.

Ponieważ dla każdego  $t \in G$  i  $a \in A$  mamy  $t^{-1}at \in A$ , z definicji  $\rho_\chi$  otrzymujemy

$$\rho'(a) = \rho_\chi(t^{-1}at) = \chi(t^{-1}at)\rho(e) = (t \cdot \chi)(a)\mathbb{1}_V$$

oraz

$$\rho''(a) = \rho_\chi(a) = \chi(a)\mathbb{1}_V.$$

Oznacza to, że  $\rho'$  w obcięciu do  $A$  jest wielokrotnością  $t \cdot \chi$ , a  $\rho''$  w obcięciu do  $A$  jest wielokrotnością  $\chi$ . Ponadto  $t \cdot \chi \neq \chi$ , bo  $t \notin K_\chi$ , a zatem  $\rho'$  i  $\rho''$  są rozłączne. □

**Twierdzenie 6.6.** *Każda nieprzywiedlna reprezentacja  $G$  jest równoważna  $\pi_{\chi, \rho}$  dla pewnego  $\chi \in \hat{A}$  i nieprzywiedlnej  $\rho \in \text{Rep}(H_\chi, V)$ .*

*Dowód.* Niech  $\theta \in \text{Rep}(G, W)$  będzie nieprzywiedlna. Reprezentacja  $\text{Res}_A^G \theta$  rozkłada się na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych, a więc

$$W = \bigoplus_{\chi' \in \hat{A}} W_{\chi'}$$

i w każdej z podprzestrzeni  $W_{\chi'}$  operatory  $\theta(a)$  ( $a \in A$ ) działają przez mnożenie przez  $\chi'(a)$ . Co więcej

$$W_{\chi'} = \{w \in W \mid \forall a \in A \theta(a)w = \chi'(a)w\}.$$

Istnieje taki  $\chi \in \hat{A}$ , że  $W_\chi \neq \{0\}$ . Podprzestrzeń ta jest niezmiennicza dla podgrupy  $H_\chi \subset H \subset G$ : dla  $a \in A$ ,  $h \in H_\chi$  i  $w \in W_\chi$  mamy

$$\begin{aligned} \theta(a)(\theta(h)w) &= \theta(ah)w = \theta(hh^{-1}ah)w \\ &= \theta(h)\theta(h^{-1}ah)w = \theta(h)\chi(h^{-1}ah)w \\ &= (h \cdot \chi)(a)\theta(h)w = \chi(a)(\theta(h)w), \end{aligned}$$

a więc  $\theta(h)w$  należy do  $W_\chi$ . Oznaczmy przez  $\rho$  odpowiednią reprezentację  $H_\chi$  na  $W_\chi$ . Reprezentacja ta jest nieprzywiedlna, gdyż powyższy rachunek pokazuje, że jeśli  $h \in H$  i  $w \in W_\chi$  to  $\theta(h)w \in W_\chi$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $h \in H_\chi$ . Nieprzywiedlność  $\rho$  jest tym samym, co fakt, że orbita dowolnego niezerowego  $w \in W_\chi$  przy działaniu  $H_\chi$  rozpina całą podprzestrzeń  $W_\chi$ . Gdyby dla pewnego  $w \in W_\chi \setminus \{0\}$  podprzestrzeń rozpięta przez  $\{\theta(h)w \mid h \in H_\chi\}$  była właściwą podprzestrzenią  $W_\chi$ , to orbita działania całej grupy  $H$  na  $w$  nie rozpinąłaby całego przestrzeni  $W$  (wektory  $\{\theta(h)w \mid h \in H_\chi\}$  rozpięłyby podprzestrzeń właściwą, elementy  $\{\theta(h)w \mid h \in G \setminus H_\chi\}$

leżałyby w podprzestrzeniach  $W_{\chi'}$  dla  $\chi' \neq \chi$ , a elementy  $A$  w każdej podprzestrzeni  $W_{\xi}$  działają jak mnożenie przez liczbę), co stoi w sprzeczności z nieprzywiedlnością  $\theta$ .

Tak jak opisaliśmy na początku niniejszej części, możemy utworzyć podgrupę  $K_{\chi} = AH_{\chi}$  i rozszerzamy reprezentację  $\rho$  na  $K_{\chi}$  w efekcie otrzymując reprezentację  $\rho_{\chi}$ . Stąd

$$\dim \operatorname{Hom}_{K_{\chi}}(\operatorname{Res}_{K_{\chi}}^G \theta, \rho_{\chi}) \geq 1.$$

Ale  $\operatorname{Hom}_{K_{\chi}}(\operatorname{Res}_{K_{\chi}}^G \theta, \rho_{\chi}) \cong \operatorname{Hom}_G(\theta, \operatorname{Ind}_{K_{\chi}}^G \rho_{\chi})$ , a więc

$$\dim \operatorname{Hom}_G(\theta, \operatorname{Ind}_{K_{\chi}}^G \rho_{\chi}) \geq 1.$$

Skoro  $\theta$  i  $\operatorname{Ind}_{K_{\chi}}^G \rho_{\chi} = \pi_{\chi, \rho}$  są nieprzywiedlne (na mocy twierdzenia 6.5), otrzymujemy  $\theta \approx \pi_{\chi, \rho}$ .  $\square$

## 7. PRZYKŁAD: REPREZENTACJE GRUPY DIHEDRALNEJ

Grupa dihedralna  $D_{2n}$  jest to grupa symetrii  $n$ -kąta foremnego. Oznaczając przez  $r$  obrót o kąt  $\frac{2\pi}{n}$ , a przez  $s$  dowolną symetrię zachowującą  $n$ -kąt foremny wpisany w okrąg jednostkowy, mamy

$$D_{2n} = \{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}.$$

Podzbiór  $A = \{e, r, \dots, r^{n-1}\}$  jest podgrupą normalną izomorficzną z  $\mathbb{Z}_n$ , a podzbiór  $H = \{e, s\}$  jest podgrupą izomorficzną z  $\mathbb{Z}_2$  taką, że  $D_{2n} = AH$  i  $A \cap H = \{e\}$ . Innymi słowy  $D_{2n} \cong \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$ , gdzie nietrywialny element  $\mathbb{Z}_2$  działa na  $\mathbb{Z}_n$  przez automorfizm

$$\mathbb{Z}_n \ni b \mapsto n - b \in \mathbb{Z}_n.$$

Zbiór  $\hat{A}$  możemy łatwo utożsamić ze zbiorem

$$\{e^{\frac{2\pi i b}{n}} \mid b = 0, \dots, n-1\} \quad (7.1)$$

(charakterowi  $\chi$  przyporządkowujemy  $\chi(1)$ ), a działanie nietrywialnego elementu  $H$  na  $\hat{A}$  odbywa się przez automorfizm

$$e^{\frac{2\pi i b}{n}} \mapsto e^{-\frac{2\pi i b}{n}}, \quad b \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Tak więc liczba i struktura zbioru orbit działania  $H$  na  $\hat{A}$  zależy od parzystości  $n$ :

- gdy  $2 \mid n$  mamy  $\frac{n}{2} - 1$  orbit dwuelementowych (grupa izotropii trywialna) oraz dwie orbity jednoelementowe (grupa izotropii  $\mathbb{Z}_2$ );
- gdy  $2 \nmid n$  mamy  $\frac{n-1}{2}$  orbit dwuelementowych (grupa izotropii trywialna) oraz jedną orbitę jednoelementową (grupa izotropii  $\mathbb{Z}_2$ ).

Przeanalizujemy najpierw reprezentacje indukowane, które pochodzą z konstrukcji opisanej w części 6.1 od orbit dwuelementowych. Ustalmy więc taką orbitę i należący do niej charakter  $\chi$ . Innymi słowy ustalamy liczbę  $k$  ze zbioru

$$\begin{aligned} &\{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\} && \text{gdy } 2 \mid n, \\ &\{1, \dots, \frac{n-1}{2}\} && \text{gdy } 2 \nmid n. \end{aligned}$$

i mamy  $\chi(r^b) = e^{\frac{2\pi i k b}{n}}$  dla  $b = 0, \dots, n-1$ . Ponieważ orbita jest dwuelementowa, mamy  $H_{\chi} = \{e\}$ ,  $K_{\chi} = A$  oraz  $\rho_{\chi} = \chi$  (w szczególności jest to reprezentacja jednowymiarowa:  $V = \mathbb{C}$ ). Stąd przestrzeń  $\operatorname{Ind}_{K_{\chi}}^{D_{2n}} V$  składa się z funkcji  $f : D_{2n} \rightarrow \mathbb{C}$  spełniających warunek

$$f(gr^b) = e^{-\frac{2\pi i k b}{n}} f(g), \quad g \in D_{2n}, b \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Widzimy więc, że każda taka funkcja jest jednoznacznie wyznaczona przez swoje wartości np. na elementach  $e$  i  $s$ . Ustalmy zatem izomorfizm  $\Lambda : \operatorname{Ind}_{K_{\chi}}^{D_{2n}} V \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$\Lambda : f \mapsto \begin{bmatrix} f(e) \\ f(s) \end{bmatrix}.$$

Wtedy  $\Lambda^{-1}$  przyporządkowuje wektorowi  $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$  funkcję

$$s^a r^b \mapsto e^{-\frac{2\pi i k b}{n}} \alpha^{1-a} \beta^a, \quad a \in \{0, 1\}, b \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Oznaczmy przez  $\sigma$  reprezentację  $\text{Ind}_{K_\chi}^{D_{2n}} \rho_\chi$ . Wówczas dla każdego  $g \in D_{2n}$  operator  $\Lambda\sigma(g)\Lambda^{-1}$  działa jako

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} (\Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}) (g^{-1}) \\ (\Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}) (g^{-1}s) \end{bmatrix}$$

Podstawiając  $g = r$  i korzystając z podanego wyżej opisu funkcji  $\Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$  otrzymujemy

$$\Lambda\sigma(r)\Lambda^{-1} : \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi i k}{n}} \alpha \\ e^{-\frac{2\pi i k}{n}} \beta \end{bmatrix},$$

a dla  $g = s$

$$\Lambda\sigma(s)\Lambda^{-1} : \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

Innymi słowy  $\text{Ind}_{K_\chi}^{D_{2n}} \rho_\chi$  jest równoważna reprezentacji  $\theta \in \text{Rep}(D_{2n}, \mathbb{C}^2)$  takiej, że

$$\theta(r) = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi i k}{n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i k}{n}} \end{bmatrix}, \quad \theta(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Teraz przejdźmy do reprezentacji zdefiniowanych w oparciu o orbity jednoelementowe. W tym przypadku podgrupa izotropii jest izomorficzna z  $\mathbb{Z}_2$ , a więc posiada dwie reprezentacje nieprzywiedlne – trywialną i „znakową” przyporządkowującą nietrywialnemu elementowi  $\mathbb{Z}_2$  liczbę  $-1$ . Niech więc  $\{\chi\}$  będzie orbitą jednoelementową. W przyjętej przez nas odpowiedniości pomiędzy  $\hat{A}$ , a zbiorem (7.1) mamy

$$\begin{aligned} \chi &\in \{-1, 1\} && \text{gdy } 2 \mid n, \\ \chi &= 1 && \text{gdy } 2 \nmid n. \end{aligned}$$

Co więcej, skoro  $H_\chi = H$ , mamy  $K_\chi = A \rtimes H = D_{2n}$ , a więc dla dowolnej nieprzywiedlnej reprezentacji  $\rho$  grupy  $H_\chi$  (która musi być jednowymiarowa) reprezentacja  $\text{Ind}_{K_\chi}^{D_{2n}} \rho$  jest równa  $\rho_\chi$ .

W przypadku  $2 \mid n$  otrzymujemy zatem cztery reprezentacje  $\theta_1, \dots, \theta_4$  pochodzące od par  $(\chi, \rho)$ :

$$\begin{aligned} \theta_1 &\longleftrightarrow (\chi = 1, \rho - \text{trywialna}), & \theta_2 &\longleftrightarrow (\chi = 1, \rho - \text{nietrywialna}), \\ \theta_3 &\longleftrightarrow (\chi = -1, \rho - \text{trywialna}), & \theta_4 &\longleftrightarrow (\chi = -1, \rho - \text{nietrywialna}), \end{aligned}$$

a w przypadku  $2 \nmid n$  dostajemy tylko dwie  $\phi_1$  i  $\phi_2$  pochodzące odpowiednio od trywialnej i nietrywialnej reprezentacji  $H$ .

Zgodnie z definicją  $\rho_\chi$  mamy

$$\rho_\chi(s^a r^b) = \rho_\chi(s^a) \rho_\chi(r^b) = \rho(s^a) \chi(r^b) = \rho(s)^a \chi(r)^b, \quad a \in \{0, 1\}, \quad b \in \{0, \dots, n-1\},$$

co daje wartości odpowiednio  $\theta_1, \dots, \theta_4$  i  $\phi_1, \phi_2$  przedstawione w tabelach 1 i 2.

TABELA 1. Jednowymiarowe reprezentacje grupy  $D_{2n}$ , gdy  $2 \mid n$

|            | $r^b$    | $sr^b$       |
|------------|----------|--------------|
| $\theta_1$ | 1        | 1            |
| $\theta_2$ | 1        | -1           |
| $\theta_3$ | $(-1)^b$ | $(-1)^b$     |
| $\theta_4$ | $(-1)^b$ | $(-1)^{b+1}$ |

TABELA 2. Jednowymiarowe reprezentacje grupy  $D_{2n}$ , gdy  $2 \nmid n$

|          | $r^b$ | $sr^b$ |
|----------|-------|--------|
| $\phi_1$ | 1     | 1      |
| $\phi_2$ | 1     | -1     |

Zgodnie z twierdzeniem 6.6, powyżej opisaliśmy wszystkie (z dokładnością do równoważności) parami nierównoważne nieprzywiedlne reprezentacje grupy  $D_{2n}$ .

## LITERATURA

- [1] J.-P. Serre: *Reprezentacje liniowe grup skończonych*. PWN 1988.